DERIVATE DELLE FUNZIONI

esercizi proposti dal Prof. Gianluigi Trivia

11 novembre 2022

Incremento della variabile indipendente e della funzione.

Se x, x_1 sono due valori della variabile indipendente x, $y = f(x_2)$ e $y_1 = f(x_1)$ le corrispondenti immagini, allora

$$\triangle x = x_1 - x$$

è detto *incremento* della variabile x, e

$$\triangle y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(\triangle x + x) - f(x)$$

è detto incremento della funzione.

Il rapporto

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

è detto *rapporto incrementale* della funzione.

Si chiama *derivata* della funzione $f(x)$ rispetto alla variabile x, e si indica con $y^{'} = \frac{dy}{dx}$, il limite, se esiste, del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile x, cioè

$$y^{'} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

La grandezza algebrica della derivata esprime il *coefficiente angolare* della tangente nel punto x del grafico della funzione $f(x)$. La derivata esprime la *velocità di variazione* della funzione nel punto considerato.

Esempio. Trovare la derivata della funzione $y = x^2$
Calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} = \frac{2x\triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x}$$

Calcoliamo il limite di tale rapporto

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle x\,(2x + \triangle x)}{\triangle x} = 2x$$

Esercizio 1. Trovare l'incremento della funzione $y = x^2$ corrispondente alla variazione dell'argomento:

- da $x = 1$ a $x_1 = 2$: calcoliamo $\triangle y$

$$\triangle y = 4 - 1 = 3$$

Esercizio 2. Calcolare $\triangle y$ per la funzione $y = \sqrt[3]{x}$, se $x = a$ e $\triangle x = h$

Soluzione. sappiamo che $\triangle y = y_1 - y$, dove y_1 e y sono le immagini di x_1e x. Troviamo x_1

$$x_1 = x + \triangle x = a + h$$

pertanto

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{a + h} \\ y &= \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

da cui

$$\triangle y = \sqrt[3]{a + h} - \sqrt[3]{a}$$

Rapporto incrementale

Esercizio 3. Calcolare l'incremento $\triangle y$ ed il rapporto incrementale per le funzioni:

$y = \frac{1}{(x^2-2)^2}$ per $x = 1$ e $\triangle x = 0,4$: calcoliamo x_1

$$x_1 = 1 + 0,4 = 1,4 = \frac{7}{5}$$

per cui

$$\triangle y = 625 - 1 = 624$$

il rapporto incrementale sarà

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{624}{\frac{2}{5}} = 1560$$

Esercizio 4. Determinare $\triangle y$ e il rapporto incrementale corrispondenti alle variazioni dell'argomento da x a $x + \triangle x$ per le funzioni:

- $y = ax + b$:

$$\triangle y = y_1 - y = a(x + \triangle x) + b - ax + b = a\triangle x$$

  il rapporto incrementale sarà

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a\triangle x}{\triangle x} = a$$

- $y = x^3$:

$$\begin{aligned} \triangle y = y_1 - y &= (x + \triangle x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2\triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3 \end{aligned}$$

  il rapporto incrementale sarà

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{3x^2\triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3}{\triangle x} = 3x^2 + 3x\triangle x + (\triangle x)^2$$

- $y = \sqrt{x}$:

$$\triangle y = y_1 - y = \sqrt{(x + \triangle x)} - \sqrt{x}$$

  il rapporto incrementale sarà

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sqrt{(x + \triangle x)} - \sqrt{x}}{\triangle x}$$

  razionalizzando il numeratore, si ottiene infine

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x) - x}{\left(\sqrt{(x + \triangle x)} + \sqrt{x}\right)\triangle x} = \frac{1}{\sqrt{(x + \triangle x)} + \sqrt{x}}$$

$y = \ln x$:

$$\triangle y = y_1 - y = \ln(x + \triangle x) - \ln x$$

il rapporto incrementale sarà

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\ln(x + \triangle x) - \ln x}{\triangle x}$$

applicando la proprietà dei logaritmi $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, si ottiene

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\ln\left(\frac{x+\triangle x}{x}\right)}{\triangle x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}$$

Esercizio 5. Data la funzione $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, trova e semplifica ognuno dei seguenti: a) $f(5+h)$; b) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

Soluzione. a) Calcoliamo $f(5+h)$, ponendo di $x = 5 + h$; avremo

$$2(5+h)^2 + 3(5+h) + 4 = 50 + 20h + 2h^2 + 15 + 3h = 2h^2 + 23h + 65$$

b) calcoliamo il rapporto incrementale indicato

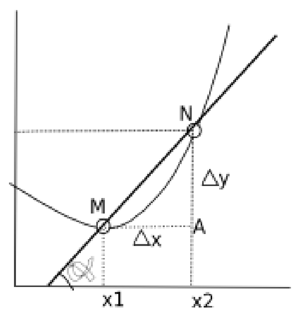
$$f(2+h) = 8 + 8h + 2h^2 + 6 + 3h + 4 = 2h^2 + 11h + 18 \quad f(2) = 8 + 6 + 4 = 18$$

per cui

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\cancel{18} + 11h + 2h^2 \cancel{-18}}{h} = \frac{h(2h+11)}{h} = 2h + 11$$

Esercizio 6. Determinare il coefficiente angolare della secante alla parabola $y = 2x - x^2$ se le ascisse dei punti di intersezione sono:

- $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$: osserviamo la figura



$\triangle x = x_2 - x_1 = 1$ e $\triangle y = y_2 - y_1 = (4-4) - (2-1) = -1$; il coefficiente angolare è uguale alla tangente dell'angolo indicato in figura come α, per cui

$$m = \tan \alpha = \frac{-1}{1} = -1$$

Esercizio 7. La legge di moto di un punto è $s = 2t^2 + 3t + 5$, con s in cm e t in s. Qual è la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t = 1$ e $t = 5$?

Soluzione. la velocità media per definizione è data dal rapporto $\frac{\triangle s}{\triangle t}$, cioè il rapporto incrementale della legge oraria, vista come $s = f(t)$. Calcoliamo i due incrementi

$$\begin{cases} \triangle s = s_5 - s_1 = 50 + 15 + 5 - 2 - 3 - 5 = 60\, m \\ \triangle t = t_5 - t_1 = 5 - 1 = 4\, s \end{cases}$$

il rapporto incrementale, e quindi la velocità media, sarà

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{60\, m}{4\, s} = 15\frac{m}{s}$$

[il calcolo della velocità media corrisponde alla individuazione del coefficiente angolare della retta secante nei due punti assegnati, la curva che esprime la legge oraria.

Esercizio 8. Determinare il rapporto $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ per la funzione $y = \frac{1}{x}$ nel punto $x = 2$ per $\triangle x = 0,01$.

Soluzione. Da $\triangle x = 0.01$ e $x = 2$, si può ottenere

$$x_1 = x + \triangle x = 2.01$$

da cui

$$\triangle y = \frac{1}{2.01} - \frac{1}{2} = \frac{-0.01}{4.02}$$

da cui

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-\frac{0.01}{4.02}}{0,01} = -\frac{1}{4.02} = -\frac{50}{201}$$

Esercizio 9. Un insegnante di matematica ha scoperto che, dopo aver dato al suo cane Django un nuovo tipo di cibo, il peso di Django cominciò ad aumentare. Dopo x settimane col nuovo cibo, il peso di Django in kg era dato approssimativamente dato da $w(x) = \sqrt{x} + 40$ per $0 \leq x \leq 6$. Trova il tasso di cambiamento del peso di Django dopo x settimane.

Soluzione. Primo passo: $w(x+h) = \sqrt{x+h} + 40$.

Secondo passo: $w(x+h) - w(x) = \sqrt{x+h} + 40 - (\sqrt{x} + 40) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

Terzo passo: $\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Per poter dividere per h, moltiplicare sia il numeratore che il denominatore per $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$; cioè, razionalizzare il numeratore.

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$\frac{x + h - x}{h\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{h}{h\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Quarto passo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Questo ci dice, ad esempio, che dopo 4 settimane, quando il peso di Django è $w(4) = \sqrt{4} + 40 = 42\, kg$, il suo peso sta aumentando ad una velocità di $w'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}\frac{kg}{sett}$.

Limite del rapporto incrementale

Esercizio 10. Calcolare la derivata della funzione $y = \tan x$

Soluzione. la derivata è il limite del rapporto incrementale per $\triangle x \to 0$. Calcoliamo prima il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle y}{\triangle x} &= \frac{\tan(x+\triangle x)-\tan x}{\triangle x} = \\
&= \frac{\frac{\sin(x+\triangle x)}{\cos(x+\triangle x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\triangle x} = \\
&= \frac{\frac{\sin x\cos\triangle x+\cos x\sin\triangle x}{\cos x\cos\triangle x-\sin x\sin\triangle x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\triangle x} = \\
&= \frac{\cos^2 x\sin\triangle x+\sin^2 x\sin\triangle x}{\triangle x\cos x\,(\cos x\cos\triangle x-\sin x\sin\triangle x)} = \\
&= \frac{\sin\triangle x}{\triangle x\cos x\,(\cos x\cos\triangle x-\sin x\sin\triangle x)}
\end{aligned}$$

calcoliamo il limite di tale rapporto

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\triangle x}{\triangle x\cos x\,(\cos x\cos\triangle x-\sin x\sin\triangle x)} =$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\triangle x}{\triangle x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+\triangle x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Regole principali di calcolo delle derivate

Tabella riassuntiva

Se c è una costante e $f(x)$ e $g(x)$ sono le funzioni derivabili, allora

$$\begin{array}{ll}
(c)' = 0 & (cf(x))' = cf'(x) \\
(x)' = 1 & (f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x) & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}
\end{array}$$

Tavola delle derivate delle funzioni principali

$$\begin{array}{ll}
(x^n)' = nx^{n-1} & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ per } |x|<1 \\
(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
(\sin x)' = \cos x & (a^x)' = a^x\ln a \\
(\cos x)' = -\sin x & (e^x)' = e^x \\
(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x>0 \\
(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \\
(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ per } |x|<1 &
\end{array}$$

Regola di derivazione per le funzioni composte

Se $y = f(z)$ ed $z = g(x)$, cioè $y = f[g(x)]$, dove le funzioni f, g sono derivabili, allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Esempio:

$$y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^5$$

poniamo $y = z^5$, dove $z = \left(x^2 - 2x + 3\right)$. Si ha quindi

$$y^{'} = \left(z^5\right)_z^{'} \left(x^2 - 2x + 3\right) x^{'} = 5z^4 \left(2x - 2\right) = 10 \left(x - 1\right) \left(x^2 - 2x + 3\right)^4$$

Esercizi di derivazione

Funzioni algebriche

Esercizio 11. Calcola le derivate delle funzioni assegnate:

- $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$: applichiamo la regola delle derivate di una potenza $\left(x^n\right)^{'} = nx^{n-1}$ ai singoli termini del polinomio e la derivazione di una costante per il termine noto $(c)^{'} = 0$

$$y^{'} = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

- $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$: per le funzioni polinomiali utilizziamo sempre la regola di derivazione delle potenze $\left(x^n\right)^{'} = nx^{n-1}$

$$y^{'} = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$$

- $y = -\dfrac{5x^3}{a}$:

$$y^{'} = -\frac{15x^2}{a}$$

- $y = at^m + bt^{m+n}$: la stessa regola di derivazione in un caso tutto algebrico

$$y^{'} = amt^{m-1} + b\left(m + n\right)t^{m+n-1}$$

- $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$: la derivata è rispetto alla variabile x, tutte le altre lettere sono considerate come costanti

$$y^{'} = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$: anche qui π e $\ln 2$ rappresentano dei valori numerici costanti, mentre $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$y^{'} = -\frac{\pi}{x^2}$$

- $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$: potenze con esponente negativo e razionale, cioè radici cubiche e quadrate; tutti questi termini possono sempre essere trattati secondo la regola della derivazione di una potenza

$$y^{'} = 2x^{\frac{2}{3}-1} - 5x^{\frac{5}{2}-1} - 3x^{-3-1} = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$$

- $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$: questa funzione può essere riscritta sotto forma di un'unica potenza: $y = x^2 x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}$

$$y^{'} = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$$

- $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$: trasformiamo le radici al denominatore come potenze con esponente frazionario negativo: $y = ax^{-\frac{2}{3}} - bx^{-\frac{4}{3}}$

$$y^{'} = -\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}}$$

- $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$: questa è una funzione polinomiale fratta; la sua derivata viene calcolata applicando la derivazione delle singole potenze al numeratore e al denominatore e la regola di derivazione di un rapporto $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x) - g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$$y^{'} = \frac{2x^2 - 10x + 10 - (2x+3)(2x-5)}{(x^2-5x+5)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2-5x+5)^2}$$

- $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$: possiamo prima sommare le due frazioni e poi derivare la frazione risultante: $y = \frac{2x-2x+1}{x(2x-1)} = \frac{1}{2x^2-x}$; in questo caso la derivata del numeratore è nulla

$$y^{'} = \frac{-4x+1}{x^2(2x-1)^2}$$

- $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$: applichiamo la regola di derivazione di un rapporto di funzione e la derivata elementare relativa ad una radice quadrata

$$y^{'} = \frac{\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse

- $y = 5\sin x + 3\cos x$: ricordiamo le derivate delle funzioni goniometriche, $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$

$$y' = 5\cos x - 3\sin x$$

- $y = \tan x - \cot x$: ricordiamo le derivate delle due funzioni, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

- $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$: derivo applicando le derivate fondamentali e la regola di derivazione del rapporto $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

- $y = 2x\sin x - \left(x^2 - 2\right)\cos x$: oltre alle derivate fondamentali delle potenze e delle funzioni goniometriche, utilizzeremo anche la regola per la derivata di un prodotto: $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, [le parentesi non sono necessarie, ma servono per mostrare le varie parti in cui suddividiamo la derivazione]

$$\begin{aligned} y' &= [(2)\sin x + 2x(\cos x)] - \left[(2x)\cos x + \left(x^2 - 2\right)(-\sin x)\right] = \\ &= 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x = x^2 \sin x \end{aligned}$$

- $y = x\cot x$: basta applicare la regola della derivata di un prodotto

$$y' = (1)\cot x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$$

- $y = x \arcsin x$: come sopra

$$y' = (1)\arcsin x + x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $y = \dfrac{\left(1 + x^2\right)\arctan x - x}{2}$: anche in questo caso applichiamo le regole del prodotto e della somma; (questa non è una funzione fratta e non richiede la regola del quoziente)

$$y' = \frac{1}{2}\left[(2x)\arctan x + \left(1 + x^2\right)\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) - 1\right] = x \arctan x$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

- $y = x^7 e^x$: ricordiamo che la derivata di $(e^x)' = e^x$ e applicando la regola del prodotto, si ha
$$y' = \left(7x^6\right) e^x + x^7 e^x = x^6 e^x (7 + x)$$

- $y = (x-1)\, e^x$: deriviamo applicando la regola del prodotto, sapendo che $(x-1)' = 1$
$$y' = 1e^x + (x-1)\, e^x = xe^x$$

- $y = \dfrac{e^x}{x^2}$: deriviamo applicando la regola del quoziente, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$, sapendo che $\left(x^2\right)' = 2x$
$$y' = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x (x-2)}{x^4} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

- $y = e^x \cos x$: applichiamo la regola del prodotto, ricordando che $(\cos x)' = -\sin x$
$$y' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

- $y = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$: applichiamo la regola del prodotto
$$y' = (2x-2)\, e^x + \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x = x^2 e^x$$

- $y = e^x \arcsin x$: ricordiamo che $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$$y' = e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$: applichiamo la regola del prodotto, ricordando che $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$$y' = \frac{(2x)\ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x\,(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$: regole del prodotto e della somma
$$y' = \left(3x^2\right) \ln x + \frac{x^3}{x} - \frac{3x^2}{3} = 3x^2 \ln x$$

- $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$: regola della quoziente e della somma
$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\ln x}{x^2} = \frac{-1 + 2x - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{2x - 2 + \ln x}{x^2}$$

- $y = \ln x \log x - \ln a \log_a x$: regola del prodotto e della somma, ricordando che $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$; $\log x$ rappresenta $\log_a$ con $a = 10$, mentre $\ln a$ è una costante
$$y' = \frac{1}{x}\log x + \ln x \frac{\log e}{x} - \ln a \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{\ln 10} + \ln x \frac{\ln e}{\ln 10} - \ln e\right)$$

Funzioni Composte

- $y = \left(1 + 3x - 5x^2\right)^{30}$: il polinomio $\left(1 + 3x - 5x^2\right)$ rappresenta la base della potenza con esponente 30. Deriveremo pertanto come una potenza; essendo però la base una funzione di x, dovremo moltiplicare anche per la derivata di tale polinomio

$$y^{'} = 30\left(1 + 3x - 5x^2\right)^{29} \cdot (3 - 10x)$$

- $y = \left(\dfrac{ax + b}{c}\right)^3$: una funzione polinomiale come base di una potenza, si procede come nel precedente esercizio

$$y^{'} = 3\left(\frac{ax + b}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)$$

- $y = \left(3 + 2x^2\right)^4$: come i due esercizi precedenti

$$y^{'} = 4\left(3 + 2x^2\right)^3 \cdot (4x) = 16x\left(3 + 2x^2\right)^3$$

- $y = \dfrac{3}{56\,(2x - 1)^7}$: in questo caso il polinomio base di una potenza è il denominatore della frazione e ciò richiede l'utilizzo anche della regola del quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x) - g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$$y^{'} = \frac{3}{56} \cdot \frac{-7\,(2x - 1)^6\,(2)}{(2x - 1)^{14}} = -\frac{3}{4\,(2x - 1)^8}$$

- $y = \sqrt{1 - x^2}$: radice con radicando funzione di x

$$y^{'} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$: riscriviamo prima la radice cubica come potenza ad esponente frazionario $y = \left(a + bx^3\right)^{\frac{1}{3}}$ e deriviamo secondo la regola delle potenze

$$y^{'} = \frac{1}{3}\left(a + bx^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3bx^2\right) = bx^2\left(a + bx^3\right)^{-\frac{2}{3}} = bx^2\sqrt[3]{\left(a + bx^3\right)^2}$$

- $y=(3-2\sin x)^5$: sempre come potenza per la derivata del polinomio base

$$y^{'}=5\,(3-2\sin x)^4\,(-2\cos x)=-10\cos x\,(3-2\sin x)^4$$

- $y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$: si può considerare come un polinomio in $\tan x$ e derivare secondo le modalità delle funzioni polinomiali, tenendo conto che $\tan x$ è appunto a sua volta una funzione di x, e che la sua derivata è data da $(\tan x)^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}$

$$y^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5\tan^4 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(1-\tan^2 x+\tan^4 x\right)$$

- $y=\sqrt{\cot x}-\sqrt{\cot\alpha}$: qui si tratta di ricordare le due derivate fondamentali della cotangente $-\frac{1}{\sin^2 x}$ e della radice quadrata $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; la $\cot\alpha$ si deve considerare come una costante

$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

- $y=2x+5\cos^3 x$:

$$y^{'}=2+5\left(3\cos^2 x\right)(-\sin x)=2-15\sin x\cos^2 x$$

- $y=-\dfrac{1}{6\,(1-3\cos x)^2}$: può essere riscritta come $y=-\frac{1}{6}\,(1-3\cos x)^{-2}$ e quindi derivata come una potenza la cui base contiene la funzione coseno

$$y^{'}=-\frac{1}{6}\cdot\left[-2\,(1-3\cos x)^{-3}\right]\cdot(-3\sin x)=-\sin x\,(1-3\cos x)^{-3}=\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$$

- $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$: si può derivare come una funzione quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$$\begin{aligned}y^{'}&=\frac{-\left(9\cos^2 x\right)(-\sin x)}{9\cos^6 x}-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\end{aligned}$$

- $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$: richiede la derivazione del radicale, moltiplicata per la derivata del radicando (polinomio composto da funzioni goniometriche), cioè $\sqrt{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f^{'}(x)$

$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}}\cdot\left(\frac{3\cos x+2\sin x}{5}\right)$$

- $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$: applichiamo la derivata di una somma che è uguale alla somma delle derivate; il primo addendo si può derivare trasformandolo come $\sin^{\frac{2}{3}} x$, e il secondo come $\cos^{-3} x$

$$y' = \frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}} \cdot (2\sin x \cos x) - 3\cos^{-4} x \cdot (-\sin x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{\sin x}} + \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$$

- $y = \dfrac{1}{\arctan x}$: basta riscriverla come $\arctan^{-1} x$

$$y' = -\arctan^{-2} x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

- $y = \sqrt{xe^x + x}$: deriviamo il radicale quadrato e lo moltiplichiamo per la derivata del radicando, che contiene un prodotto di funzioni (xe^x), $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{xe^x + x}} \cdot (e^x + xe^x + 1)$$

- $y = \sqrt{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$: deriviamo separatamente i due addendi; in questo caso ricordiamo le derivate dei due esponenziali, cioè $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, mentre $(2^x)' = 2^x \ln 2$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2e^x - 2^x + 1}} \cdot (2e^x - 2^x \ln 2) + 5\ln^4 x \cdot \frac{1}{x}$$

- $y = \sin 3x + \cos\frac{x}{5} + \tan\sqrt{x}$: basta applicare le derivate delle funzioni logaritmiche

$$y' = \cos 3x \cdot 3 - \sin\frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $y = \sin\left(x^2 - 5x + 1\right) + \tan\frac{a}{x}$: si derivano le funzioni goniometriche moltiplicando poi per la derivata dei rispettivi argomenti, che sono funzioni dell'incognita x

$$y' = \cos\left(x^2 - 5x + 1\right) \cdot (2x - 5) + \frac{1}{\cos^2\frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)$$

- $y = \arcsin\dfrac{1}{x^2}$: come per l'esercizio precedente, ricordando che la derivata dell'arcoseno è $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, per cui

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}} \cdot \left(\frac{-2x}{x^4}\right) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

- $y = 5e^{-x^2}$: derivata della funzione esponenziale moltiplicata per la derivata dell'esponente

$$y^{'} = 5e^{-x^2} \cdot (-2x) = -10xe^{-x^2}$$

- $y = \ln(2x+7)$:

$$y^{'} = \frac{1}{2x+7} \cdot (2) = \frac{2}{2x+7}$$

- $y = \ln \sin x$: l'argomento del logaritmo è una funzione goniometrica di x; deriviamo prima il logaritmo moltiplicando poi la derivata del seno

$$y^{'} = \frac{1}{\sin x} \cdot (\cos x) = \cot x$$

- $y = \dfrac{x^8}{8\left(1-x^2\right)^4}$: la funzione è fratta e quindi va applicata la regola del quoziente, all'interno della quale, la derivata del denominatore richiede la derivazione di una funzione composta

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{\left(8x^7\right) 8 \left(1-x^2\right)^4 - \left[32\left(1-x^2\right)^3(-2x)\right] x^8}{64\left(1-x^2\right)^8} = \\ &= \frac{64x^7\left(1-x^2\right)^4 + 64x^9\left(1-x^2\right)^3}{64\left(1-x^2\right)^8} = \frac{64x^7\left(1-x^2\right)^3\left[1-x^2+x^2\right]}{64\left(1-x^2\right)^8} = \\ &= \frac{x^7\left(1-x^2\right)^3}{\left(1-x^2\right)^8} = \frac{x^7}{\left(1-x^2\right)^5} \end{aligned}$$

- $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$: il secondo membro presenta una frazione con numeratore irrazionale; si deriva la frazione, secondo la regola del quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$; la derivata del numeratore sarà data dalla derivata della radice $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}$ per la derivata del radicando, $f^{'}(x)$

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} \cdot (4x-2) \cdot x - 1 \cdot \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{4x^2-2x}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} - \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2} = \frac{4x^2-2x-4x^2+4x-2}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \\ &= \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \end{aligned}$$

- $y = (a+x)\sqrt{a-x}$: la derivata di un prodotto, $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, il secondo fattore andrà derivata come i radicali di indice due:

$$y' = (1)\sqrt{a-x} + (a+x)\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\cdot(-1) = \frac{2a-2x-a-x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

- $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$: scriviamo la radice cubica sotto forma di potenza, $(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$, deriviamo la potenza moltiplicando per la derivata della base che contiene anche un radicale

$$y' = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

- $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)$: dobbiamo derivare la funzione logaritmica e moltiplicare per la derivata del suo argomento

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot\left(e^x\right) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)}$$

- $y = \tan^5 5x$: deriviamo la potenza, moltiplicando per la derivata della tangente e per la derivata del suo argomento

$$y' = 5\tan^4 5x\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5 = 25\sec^2 5x\tan^4 5x$$

- $y = \sin^2\left(x^3\right)$: deriviamo la potenza, moltiplicando poi per la derivata della funzione goniometrica per la derivata del suo argomento

$$y' = 2\sin\left(x^3\right)\cdot\cos\left(x^3\right)\cdot\left(3x^2\right) = 3x^2\sin\left(2x^3\right)$$

- $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$: deriviamo prima la funzione arcoseno, moltiplicando poi per la derivata dell'argomento, una funzione polinomiale fratta

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x\left(x^2\right)-2x\left(x^2-1\right)}{x^4}\right) = \frac{2x}{x^4\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}} = \\ &= \frac{2}{x^3\sqrt{\frac{x^4-x^4+2x^2-1}{x^4}}} = \frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}} \end{aligned}$$

- $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$: applichiamo la regola di derivazione del quoziente di due funzioni; il denominatore è a sua volta funzione di x

$$y^{'} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\arccos x}{1-x^2} = \frac{\frac{-2\sqrt{1-x^2}+2x\arccos x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2}+x\arccos x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \ln\left(\arcsin 5x\right)$: deriviamo la funzione logaritmo, moltiplicando per la derivata del suo argomento e per la derivata dell'argomento dell'arcoseno

$$y^{'} = \frac{1}{\arcsin 5x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5$$

- $y = \arcsin\left(\ln x\right)$: deriviamo la funzione arcoseno, moltiplicando per la derivata del suo argomento

$$y^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

- $y = \arctan\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$: deriviamo la funzione arcotangente, moltiplicando poi per la derivata del suo argomento (la variabile è x, e quindi la derivata è rispetto ad x)

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)^2}\cdot\frac{\sin\alpha\left(1-x\cos\alpha\right)+\cos\alpha\left(x\sin\alpha\right)}{\left(1-x\cos\alpha\right)^2} \\ &= \frac{\sin\alpha - x\sin\alpha\cos\alpha + x\sin\alpha\cos\alpha}{\left(1-x\cos\alpha\right)^2\left(\frac{1+x^2\cos^2\alpha-2x\cos\alpha+x^2\sin^2\alpha}{\left(1-x\cos\alpha\right)^2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{1+x^2-2x\cos\alpha} \end{aligned}$$

- $y = \sqrt{\cos x}a^{\sqrt{\cos x}}$: applichiamo la regola della derivata del prodotto di due funzioni (un radicale e un esponenziale) tenendo conto che tali funzioni sono a loro volta funzioni della variabile x

$$y^{'} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\left(a^{\sqrt{\cos x}}\right) + \sqrt{\cos x}\left(a^{\sqrt{\cos x}}\ln a\right)\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}a^{\sqrt{\cos x}}\left(1+\ln a\sqrt{\cos x}\right)$$

- $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$: deriviamo prima la funzione logaritmo, moltiplicando poi per la derivata del suo argomento e per la derivata dell'argomento della funzione coseno, che è una funzione polinomiale fratta

$$y^{'} = \frac{1}{\cos\frac{x-1}{x}}\cdot\left(-\sin\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x-x+1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\tan\frac{x-1}{x}$$

- $y = \ln \dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$: applichiamo prima le proprietà dei logaritmi, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, e $\ln a^n = n \ln a$, ottenendo

$$y = 5\ln(x-2) - 3\ln(x+1)$$

da cui, derivando le funzioni logaritmo, si ha

$$y' = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{5x+5-3x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x+11}{(x-2)(x+1)}$$

- $y = x \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$: applichiamo la regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$y' = 1 \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x\cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ricordando le formule della goniometria può essere riscritta

$$y' = \sqrt{2}\sin(\ln x)$$

Esercizio 12. Calcolare y' se $y = \|x\|$ o se $y = x\|x\|$

- caso $y = \|x\|$: ricordando il significato del valore assoluto,

$$\begin{array}{ccc} se\ y>0 & y=x & y'=1 \\ se\ y<0 & y=-x & y=-1 \\ se\ y=0 & y=0 & y'\, non\, esiste \end{array}$$

- caso $y = x\|x\|$

$$\begin{array}{ccc} se\, y>0 & y=x^2 & y'=2x \\ se\, y<0 & y=-x^2 & y'=-2x \\ se\, y=0 & y=0 & y'\, non\, esiste \end{array}$$

Esercizio 13. Calcolare $f'(x)$ se

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & per \quad x \le 0 \\ e^{-x} & per \quad x>0 \end{cases}$$

Soluzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & per \quad x \le 0 \\ -e^{-x} & per \quad x>0 \end{cases}$$

Esercizio 14. Calcolare $f'(0)$ se $f(x) = e^{-x}\cos 3x$

Soluzione. Si chiede di calcolare la derivata della funzione nel punto indicato; ciò si ottiene calcolando la derivata e operando la sostituzione $x = 0$

$$f^{'}(x) = -e^{-x}\cos 3x + e^{-x}(-3\sin 3x) = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x)$$

sostituendo $x = 0$, si ha

$$f^{'}(0) = -e^{0}(\cos 0 + 3\sin 0) = -1(1+0) = -1$$

Esercizio 15. Per la funzione data $f(x) = e^{-x}$ calcolare l'espressione $f(0) + xf^{'}(0)$.

Soluzione. calcoliamo $f(0) = e^0 = 1$; calcoliamo poi la derivata nel punto $x = 0$

$$f^{'}(0) = -e^{-x} = -e^{0} = -1$$

pertanto

$$f(0) + xf^{'}(0) = 1 - x$$

Esercizio 16. Per le funzioni date $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$, calcolare l'espressione $\frac{g^{'}(1)}{f^{'}(1)}$

Soluzione. Calcoliamo le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= -1 \\ g^{'}(x) &= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

calcoliamo ora le derivate nel punto $x = 1$

$$\begin{aligned} f^{'}(1) &= -1 \\ g^{'}(1) &= 0 \end{aligned}$$

il loro rapporto sarà

$$\frac{g^{'}(x)}{f^{'}(x)} = 0$$

Esercizio 17. Dimostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari e che la derivata di una funzione dispari è una funzione pari.

Soluzione. Una funzione è pari se

$$f(x) = f(-x)$$

calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} [f(x)]^{'} &= f^{'}(x) \\ [f(-x)]^{'} &= -f^{'}(x) \end{aligned}$$

dando quindi una funzione dispari. Analogamente, una funzione è detta dispari se

$$f(-x) = -f(x)$$

derivando si ha

$$\begin{aligned}[f(-x)]' &= -f'(x)\\ [-f(x)]' &= -f'(x)\end{aligned}$$

cioè la stessa derivata, con la conseguenza richiesta.

Esercizio 18. Mostrare che la funzione

$$y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

soddisfa l'equazione

$$xy' = \left(1-x^2\right) y$$

Soluzione. deriviamo la funzione y

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$$

e sostituiamo

$$x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(1-x^2\right) xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

svolgendo le moltiplicazioni in entrambi i membri, si ha

$$xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Derivate di Funzioni non esplicite

Derivata di una funzione inversa

Se la funzione $y = f(x)$ ha una derivata $y_x' \neq 0$, allora la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è data da

$$x_y' = \frac{1}{y'(x)}$$

Esempio 19. Calcolare la derivata x_y' della funzione

$$y = x + \ln x$$

Calcoliamo la derivata di y rispetto ad x

$$y' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Pertanto, la derivata di x, rispetto ad y, sarà

$$x' = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

Esercizio 20. Calcolare la derivata $x_y^{'}$, nei seguenti casi

- $y = 3x + x^3$: calcoliamo la derivata $y^{'}$

  $$y^{'} = 3 + 3x^2$$

  da cui,

  $$x_y^{'} = \frac{1}{3 + 3x^2}$$

- $y = x - \frac{1}{2}\sin x$:

  $$y^{'} = 1 - \frac{1}{2}\cos x$$

  e

  $$x_y^{'} = \frac{2}{2 - \cos x}$$

- $y = x + e^{\frac{x}{2}}$:

  $$y^{'} = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

  e quindi

  $$x_y^{'} = \frac{2}{1 + e^{\frac{x}{2}}}$$

Derivata di una funzione implicita

Se la dipendenza tra le due variabili è espressa da una relazione del tipo

$$F(x, y) = 0$$

allora, per calcolare la derivata di y rispetto ad x, basta, nei casi semplici,

- calcolare la derivata rispetto ad x del primo membro dell'equazione, dove si considera y una funzione di x
- calcolare $\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0$
- risolvere rispetto alla derivata di y, $y^{'}$.

Esempio 21. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$: Calcoliamo la derivata

$$3x^2 + 3y^2y^{'} - 3a\left(y + xy^{'}\right) = 0$$

risolvendo rispetto a $y^{'}$ si ottiene

$$y^{'} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

Applicazioni della derivata alla geometria e alla fisica

Equazione della tangente a una curva

Ricordando l'interpretazione geometrica della derivata, segue che, assegnata una curva $y = f(x)$, l'equazione della tangente alla curva in un punto $P(x_0; y_0)$è

$$y - y_0 = y_0^{'}(x - x_0)$$

che, come si vede, è l'equazione della retta passante per un punto il cui coefficiente angolare è uguale alla derivata della funzione calcolata nel punto P; cioè

$$m = y_0^{'} = \frac{dy}{dx}\|_{x=x_0}$$

Angolo tra due curve

Date due curve, le cui equazioni sono $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, si definisce come angolo, α, in un loro punto comune, $P(x_0; y_0)$ quello formato dalle rispettive tangenti in questo punto. La relazione si ricava dalla trigonometria, ricordando quanto sopra detto, $m = y_0' = \tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0)\cdot f_1'(x_0)}$$

Esercizio 22. Trovare l'angolo φ formato dall'asse x e dalla tangente alla curva $y = x - x^2$ nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione. La funzione assegnata è l'equazione di una parabola passante per l'origine (termine noto uguale a zero); Il punto considerato avrà coordinate

$$y = 1 - 1^2 = 0$$

una intersezione della parabola con l'asse x. Per ottenere l'equazione della tangente in questo punto, calcoliamo la derivata della funzione

$$y = 1 - 2x$$

se $x = 1$, la derivata sarà $y' = -1$. L'equazione della tangente sarà

$$y - 0 = -1\,(x - 1)$$

da cui

$$y = -x + 1$$

L'angolo formato sarà

$$\tan\alpha = y_0' = -1$$

e quindi

$$\alpha = \arctan(-1) = 135^\circ$$

Esercizio 23. Determinare gli angoli formati dalle sinusoidi $y_1 = \sin x$ e $y_2 = \sin 2x$ e dall'asse delle ascisse nell'origine del piano cartesiano.

Soluzione. calcoliamo le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} y_1' &= \cos x \\ y_2' &= 2\cos x \end{aligned}$$

il loro valore nell'origine è

$$\begin{aligned} y_1'(0) &= 1 \\ y_2'(0) &= 2 \end{aligned}$$

la derivata nel punto indica il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto, per cui

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 1 \\ \tan\beta &= 2 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \alpha &= 45^\circ \\ \beta &= \arctan 2 \end{aligned}$$

Esercizio 24. Determinare l'angolo sotto il quale la curva $y = e^{0.5x}$ interseca la retta $x = 2$.

Soluzione. Determiniamo prima il punto di intersezione tra la retta e l'esponenziale:

$$\begin{cases} y = e^{0.5x} \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e \\ x = 2 \end{cases}$$

ricordando che tale angolo è quello formato tra la tangente all'esponenziale e la retta nel punto assegnato, è necessario calcolare la derivata

$$m = \tan\alpha = y_2^{'}(2) = \frac{e}{2}$$

questo angolo è quello formato dalla curva con l'asse x, cioè complementare a quello richiesto, ω, che sarà

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

quindi

$$\tan\omega = \cot\alpha = \frac{2}{e}$$

da cui

$$\omega = \arctan\frac{2}{e}$$

Esercizio 25. Determinare il punto della parabola

$$y = x^2 - 7x + 3$$

nel quale la tangente è parallela alla retta $5x + y - 3 = 0$

Soluzione. se la tangente è parallela alla retta data, il suo coefficiente angolare è lo stesso della retta, cioè, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{1} = -5$. Ora il coefficiente angolare è uguale alla derivata della curva nel punto assegnato; quindi

$$y^{'} = 2x - 7 = -5$$

cioè

$$x = 1$$

il punto sarà quindi

$$P\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Esercizio 26. Determinare il punto della curva $y^2 = 2x^3$ nel quale la tangente è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 2 = 0$.

Soluzione. determiniamo il coefficiente della retta assegnata

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

la retta perpendicolare avrà coefficiente angolare antireciproco, cioè

$$m_{perp} = -\frac{3}{4}$$

calcoliamo la derivata della funzione implicita $y^2 - 2x^3 = 0$,

$$2yy' - 6x^2 = 0$$

da cui

$$y' = \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{\pm x\sqrt{2x}}$$

tale derivata deve essere uguale a $-3/4$; pertanto

$$\pm\frac{3x}{\sqrt{2x}} = -\frac{3}{4}$$

cioè, con $x > 0$

$$\pm\frac{3x\sqrt{2x}}{2x} = -\frac{3}{4}$$

moltiplicando per il *mcm*

$$\pm 2\sqrt{2x} = -1$$

elevando al quadrato

$$8x = 1$$

da cui

$$x = \frac{1}{8}$$

le ordinate dei punti si ottengono sostituendo il valore trovato nella funzione

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{8^3}} = \pm\frac{1}{16}$$

Esercizio 27. Determinare l'angolo di intersezione delle due parabole

$$y = (x-2)^2 \qquad y = -x^2 + 6x - 4$$

Soluzione. l'angolo richiesto è quello formato dalle tangenti alle due curve nel punto di intersezione; calcoliamo pertanto la loro intersezione

$$\begin{cases} y & = & (x-2)^2 \\ x^2 - 4x + 4 & = & -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$$

risolvendo la seconda equazione, si ha

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

che dà

$$x = 4 \qquad x = 1$$

i punti saranno quindi $A(4;4)$ e $B(1;1)$.
Determiniamo ora le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} y' &= 2x - 4 \\ y' &= -2x + 6 \end{aligned}$$

calcoliamo tali derivate nei due punti trovati

$$\begin{array}{rcl} y'(4) = 4 & e & y'(1) = -2 \\ y'(4) = -2 & e & y'(1) = 4 \end{array}$$

le rette tangenti sono tra loro parallele e quindi l'angolo formato sarà lo stesso; applicando la formula per la determinazione di tale angolo $\tan\alpha = \frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_2'(x_0)\cdot f_1'(x_0)}$, si ottiene

$$\tan\alpha = \frac{-2-4}{1-8} = -\frac{6}{7}$$

l'angolo sarà pertanto

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{6}{7}\right) = 40^\circ\, 36^{'}$$

Esercizio 28. Mostrare che le iperboli

$$xy = a^2 \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

si intersecano sotto un angolo retto.

Soluzione. calcoliamo le funzioni che esprimono tutti i coefficienti angolari delle tangenti alle due curve in ogni punto mediante la derivata delle rispettive funzioni ed eguagliamole a zero

$$\left(xy = a^2\right)^{'} = y + xy^{'} = 0 \qquad \left(x^2 - y^2 = b^2\right)^{'} = 2x - 2yy^{'} = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} y^{'} &= -\frac{y}{x} \\ y^{'} &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

i due coefficienti angolari sono antireciproci $\forall x, y$ e quindi le tangenti saranno sempre tra loro perpendicolari.

Esercizio 29. La legge di moto di un punto sull'asse OX è

$$x = 3t - t^3$$

Determinare la velocità di questo punto negli istanti $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$

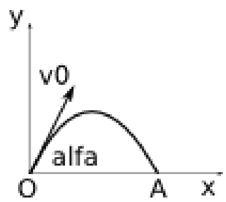
Soluzione. la velocità istantanea è definita come la derivata di $\frac{dx}{dt}$. Si tratta quindi di calcolare le derivate puntuali per i tempi indicati:

$$\begin{aligned} x^{'}(0) &= 3 - 3t^2 = 3 \\ x^{'}(1) &= 3 - 3t^2 = 0 \\ x^{'}(2) &= 3 - 3t^2 = -9 \end{aligned}$$

Esercizio 30. La legge di moto di un punto materiale lanciato in alto nel piano verticale OXY con un angolo α con l'orizzonte e con velocità iniziale v_0 è data dalle formule (trascurando la resistenza dell'aria)

$$x = v_0 t\cos\alpha \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

dove t è il tempo, g l'accelerazione della forza di gravità terrestre. Determinare la traiettoria del moto e la gittata. Determinare anche la grandezza della velocità del volo e la sua direzione.



Soluzione. Questo esercizio è la classica determinazione del moto parabolico; infatti si osserva che la componente orizzontale della velocità descrive un moto rettilineo uniforme, mentre quella verticale un moto accelerato. Ricavando infatti il tempo t dalla prima relazione e sostituendola nell'altra si ha

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y &= \frac{v_0 \sin\alpha \cdot x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \end{aligned}$$

tale equazione, di secondo grado, è descritta da una curva parabolica e rappresenta la traiettoria del punto materiale. La gittata è rappresentata in figura dalla distanza OA; gli estremi di tali segmento sono i punti di intersezione della parabola con l'asse delle x, di cui uno, O, è scelto quale origine; quindi

$$x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$$

raccogliendo la x e calcolando la soluzione diversa da zero, si ha

$$\tan\alpha = \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

da cui

$$x_A = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

La componente orizzontale e verticale della velocità sono

$$\begin{aligned} v_x = \tfrac{dx}{dt} &= v_0 \cos\alpha \\ v_y = \tfrac{dy}{dt} &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}$$

Esercizio 31. Un punto si muove sull'iperbole $y = \frac{10}{x}$ in modo tale che la sua ascissa x cresce uniformemente alla velocità di un'unità per secondo. Qual è la velocità di variazione della sua ordinata quando il punto considerato coincide con il punto $P(5;2)$?

Soluzione. Le coordinate del punto mobile sono quelle che soddisfano l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi. La sua velocità si può esprimere come $v_x = 1\,\frac{u}{sec}$; ma $v_y = y'$, per cui

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{10}{x^2}$$

calcoliamo $y'(5)$, cioè la velocità nel punto $x = 5$

$$y'(5) = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$$

da cui

$$v_y = -0.4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 32. Il raggio di una sfera cresce uniformemente con la velocità di 5 cm/sec. Con quali velocità crescono la superficie ed il volume della sfera nel momento in cui il raggio è uguale a 50 cm?

Soluzione. Ricordiamo che la superficie e il volume in funzione del raggio, sono espresse da

$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La velocità di espansione può essere intesa come $\frac{dr}{dt} = 5\,\frac{cm}{sec}$. Calcoliamo le velocità di espansione di superficie e volume, mediante la loro derivata rispetto al raggio

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 8\pi r\tfrac{dr}{dt} = 8\pi \cdot 0.50\,m \cdot 0.05\,\frac{m}{sec} = 0.2\pi\,\frac{m^2}{sec} \\ \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2\tfrac{dr}{dt} = 4\pi \cdot (0.50)^2\ m^2 \cdot 0.05\,\frac{m}{sec} = 0.05\pi\,\frac{m^3}{sec} \end{aligned}$$

Esercizio 33. Un grande pallone sferico sta perdendo aria al ritmo di un decimo di un piede cubo al secondo (più concisamente, 1 cm/s). Quanto è veloce la diminuzione del raggio del palloncino quando il suo diametro è di 6 cm ?

Soluzione. Sia R il raggio e V il volume del pallone. Allora

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Poiché la dimensioni del pallone è variabile, sia V che R sono funzioni del tempo. Esprimeremo questo fatto scrivendo

$$V = V(t) \quad R = R(t)$$

Calcolando la derivata della relazione che esprime il volume rispetto al tempo (deriveremo come per le funzioni composte), avremo

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2\frac{dR}{dt} = 4\pi R^2\frac{dR}{dt}$$

Allora $\frac{dR}{dt}$ sarà la velocità con la quale diminuisce il raggio del pallone e risolvendo rispetto ad essa

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi R^2}$$

e sostituendo i valori assegnati per il ritmo di riduzione del volume

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{4\pi R^2}\,\frac{cm^3}{s}$$

Notiamo che $\frac{dV}{dt}$ è negativo perché il pallone si sta sgonfiando. Quando il raggio del pallone è pari a 30 cm avremo

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{144\pi}\,\frac{cm}{s}$$

Esercizio 34. Siano date le due funzioni

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \qquad g(x) = x^3 - 11x + 15$$

Risolvere l'equazione $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ e sia x_0 la soluzione nell'intervallo $[0; 4]$. Considerare il punto di ascissa x_0 sul grafico delle due funzioni. Che cosa si può dedurre?

Soluzione. calcoliamo le derivate delle due funzioni polinomiali di secondo e terzo grado

$$f^{'}(x) = 2x - 3 \qquad g^{'}(x) = 3x^2 - 11$$

L'uguaglianza è vera per

$$2x - 3 = 3x^2 - 11$$

cioè

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

risolvendo, si ha, applicando la formula ridotta

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{3}$$

da cui $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{4}{3}$.
Troviamo le intersezioni delle funzioni f e g:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

si nota che $x = 2$ è una radice dell'equazione (infatti: $2^3 - 2^2 - 16 + 12 = 0$); anche le derivate si incontrano in questo punto e quindi, nel punto $x = 2$ le due funzioni hanno la stessa tangente.

Esercizio 35. Determinare i punti in cui l'iperbole equilatera di equazione

$$y = \frac{x-1}{x+3}$$

ha la tangente inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'asse x.

Soluzione. l'inclinazione di una retta tangente in un punto è espressa tramite il suo coefficiente angolare, cioè l'angolo che la retta forma con l'asse delle x, $m = \tan\alpha$; ma tale coefficiente angolare è pure espresso dal limite del rapporto incrementale, quando l'incremento tende a zero, cioè la derivata della funzione, $m = y^{'}$.
Ora se l'inclinazione è pari a $\frac{\pi}{4}$, vuol dire che la retta forma un angolo di 45°, cioè è la bisettrice del 1° e 3° quadrante di equazione $y = x$; tale retta ha coefficiente angolare $m = 1$ e la derivata di y, deve pertanto essere uguale a 1.
Calcoliamo quindi la derivata della funzione

$$y^{'} = \frac{1\,(x+3) - 1\,(x-1)}{(x+3)^2} = 1$$

da cui

$$\frac{4}{(x+3)^2} = 1$$

moltiplicando per il mcm diverso da zero, si ha

$$4 = x^2 + 6x + 9 \qquad x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x_1 = -5 \qquad x_2 = -1$$

I punti sono quindi $P\,(-5; 5)$ e $Q\,(-1; 1)$

Esercizio 36. Determinare l'ampiezza dell'angolo compreso dalle tangenti alla parabola

$$y = x^2 - 5x + 6$$

nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

Soluzione. Determiniamo prima i punti in cui la parabola interseca l'asse x, cioè quelli aventi ordinata nulla:

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= 0 \\ x_1=2 \qquad & x_2=3 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata della funzione nei punti di ascissa $x_{1,2}$:

$$y' = 2x-5$$

$$\begin{aligned} y_1'(2) &= -1 \\ y_2'(3) &= 1 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \tan\alpha = 1 \qquad & \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \tan\beta = -1 \qquad & \beta = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

da cui

$$\beta-\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 37. Data la curva di equazione

$$y = x^3-x^2-x+1$$

determinare le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con gli assi.

Soluzione. Calcoliamo i punti di intersezione con l'asse x, cioè i punti ad ordinata nulla:

$$x^3-x^2-x+1=0$$

con raccoglimento parziale

$$\begin{aligned} x^2(x-1)-(x-1) &= 0 \\ (x-1)^2(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

I punti sono $A(1;0)$, in cui la curva è tangente all'asse x, e $B(-1;0)$.
Calcoliamo ora la derivata della funzione nei punti ottenuti

$$y' = 3x^2-2x-1$$

$$\begin{aligned} y'(1) &= 0 \\ y'(-1) &= 4 \end{aligned}$$

Una tangente avrà $m=0$, e sarà quindi, come detto, la retta $y=0$; la seconda tangente avrà equazione (conoscendo m e un punto)

$$y-0=4(x+1)$$

cioè

$$y=4x+4$$

Calcoliamo ora l'intersezione con l'asse y, cioè i punti ad ascissa nulla:

$$y(0) = 1$$

Il punto sarà $C(0;1)$. Calcoliamo la derivata in questo punto

$$y'(0) = -1$$

la retta sarà quindi

$$y - 1 = -1x$$

cioè

$$y = -x + 1$$

Esercizio 38. Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola $y = x^2 - 3x + 4$ nei suoi punti di intersezione con la retta $y = x + 1$

Soluzione. determiniamo prima i punti di intersezione

$$\begin{cases} x + 1 = x^2 - 3x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$A(1;2) \qquad B(3;4)$$

Per trovare le equazioni delle equazioni, calcoliamo prima la derivata della funzione

$$y' = 2x - 3$$

e poi calcoliamo le due derivate puntuali

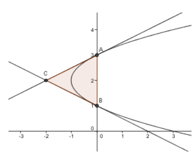
$$\begin{aligned} y'(1) &= -1 \\ y'(3) &= 3 \end{aligned}$$

La tangente in A sarà:

$$y - 2 = -1(x - 1) \qquad y = -x + 3$$

$$y - 4 = 3(x - 3) \qquad y = 3x - 5$$

Esercizio 39. Siano A e B i punti di intersezione della parabola $x = y^2 - 4y + 3$ con l'asse y. Dette t_1 e t_2 le tangenti ad essa nei punti A e B e C il punto di intersezione delle due tangenti, determinare l'area del triangolo ABC



Soluzione. Le intersezioni della parabola, con asse parallelo all'asse x, con l'asse delle ordinate, cioè ad ascissa nulla, sono

$$\begin{array}{rcl} y^2-4y+3 & = & 0 \\ y_1=1 & & y_2=3 \end{array}$$

I punti hanno quindi coordinate $A(0;3)$ e $B(1;3)$.
Calcoliamo la derivata rispetto a y della funzione nei due punti:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 2y-4 \\ x'(1)=-2 & & x'(3)=2 \end{array}$$

In questo caso i coefficienti angolari rappresentano l'angolo rispetto all'asse y; per trovare le equazioni delle tangenti è necessario utilizzare l'angolo rispetto all'asse x. I coefficienti angolari delle rette saranno pertanto i reciproci, tenendo anche conto della relazione che esiste per la derivata di una funzione inversa:

$$m_1=-\frac{1}{2} \qquad m_2=\frac{1}{2}$$

le equazioni saranno allora

$$\begin{array}{cc} y-1=-\frac{1}{2}x & y=-\frac{1}{2}x+1 \\ y-3=\frac{1}{2}x & y=\frac{1}{2}x+3 \end{array}$$

Troviamo il punto C

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 & = & \frac{1}{2}x+3 \\ y & = & \frac{1}{2}x+3 \end{cases}$$

da cui

$$C(-2;2)$$

cioè il punto C sta sull'asse del segmento del segmento AB; il triangolo ABC è pertanto isoscele (anche per motivi di simmetria); la sua area è

$$A_{ABC}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$$

Esercizio 40. Determinare i parametri a e b in modo che la curva di equazione $y=\frac{ax+b}{x^2}$ passi per il punto $(1;3)$ e abbia ivi per tangente la retta $4x+y-7=0$.

Soluzione. Se la curva passa per il punto assegnato, allora le coordinate del punto verificano l'equazione della curva:

$$3=a+b$$

Se in questo punto la tangente alla curva ha l'equazione assegnata, allora il suo coefficiente angolare, -4, è la derivata della equazione della curva in questo punto:

$$\begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{ax^2-2ax^2-2bx}{x^4}=\dfrac{-ax-2b}{x^3} \\ -4 & = & -a-2b \end{array}$$

Combinando le due relazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} a+b & = & 3 \\ a+2b & = & 4 \end{cases}$$

risolvendo con il metodo di riduzione

$$b = 1 \qquad a = 2$$

Esercizio 41. Data la funzione f definita in $\mathbb{R}$:

$$f : x \rightarrow 2x^3 - x^2 + 2x + 4$$

sia C il suo grafico. Determinare i punti di C in cui la tangente è parallela alla retta $y = 6x - 1$.

Soluzione. I coefficienti angolari delle tangenti alla curva sono espressi dalla derivata della funzione

$$y^{'} = 6x^2 - 2x + 2$$

Tale derivata deve essere uguale al coefficiente angolare della retta assegnata, $m = 6$, per cui

$$6x^2 - 2x - 4 = 0$$

le soluzioni di questa equazione sono

$$x_1 = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = 1$$

I punti saranno, sostituendo nella equazione della curva C,

$$\left(-\frac{2}{3}; \frac{44}{27}\right) \qquad (1; 7)$$

Esercizio 42. Determinare a, b, c, d in modo che la curva di equazione $y = \frac{ax^2+b}{cx+d}$ abbia come asintoto una retta parallela a $y = 2x + 2$ e abbia nel punto $A\,(0; 1)$ la tangente inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'asse x.

Soluzione. La curva avrà un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, se

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 + dx} &= \frac{a}{c} = 2 \\ q = \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{ax^2 + b}{cx + d} - \frac{ax}{c} &= -\frac{ad}{c^2} = 2 \end{aligned}$$

Il punto A appartiene alla curva e le sue coordinate soddisfano quindi l'equazione della stessa:

$$1 = \frac{b}{d}$$

La derivata della funzione è:

$$y^{'} = \frac{2ax\,(cx + d) - c\left(ax^2 + b\right)}{(cx + d)^2} = \frac{acx^2 + 2adx - bc}{(cx + d)^2}$$

tale derivata deve valere 1, ($m = \tan\frac{\pi}{4} = y^{'}\,(0) = 1$) nel punto dato:

$$1 = -\frac{bc}{d^2}$$

Componendo tutte le condizioni, si ha:

$$\begin{cases} a &= 2c \\ -ad &= 2c^2 \\ b &= d \\ -bc &= d^2 \end{cases}$$

riscriviamo l'equazione dividendo tutto per c

$$y = \frac{\frac{a}{c}x^2 + \frac{b}{c}}{\frac{c}{c}x + \frac{d}{c}}$$

ma, dalla prima equazione del sistema $\frac{a}{c} = 2$, per cui, si ha

$$y = \frac{2x^2 + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

ma, dalla terza equazione, $b = d$, per cui

$$y = \frac{2x^2 + \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

la seconda equazione $\frac{ad}{c^2} = -2$ si può riscrivere come $\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{c} = -2$, ma $\frac{a}{c} = 2$, pertanto cioè $\frac{d}{c} = -1$e l'equazione cercata sarà

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

Esercizio 43. Determinare i coefficienti a e b in modo che la curva di equazione:

$$y = a \sin 2x + b \cos x$$

abbia nel punto $\left(\frac{\pi}{4}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Soluzione. Il punto appartiene alla curva; sostituisco quindi le coordinate del punto

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = a + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cioè $a = 1$
la tangente dovrà avere coefficiente angolare $m = -1$; calcolo la derivata

$$y^{'} = 2a \cos 2x - b \sin x$$

nel punto indicato, la derivata avrà valore -1, quindi

$$-1 = -b\frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui si ricava $b = \sqrt{2}$

Esercizio 44. La tangente alla curva

$$y = \frac{3 \tan x}{1 + \sin x}$$

nel suo punto di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$ taglia l'asse x nel punto T. Trovare la distanza OT.

Soluzione. Se il punto di tangenza ha ascissa $x=\frac{\pi}{6}$, avrà ordinata $y=\frac{3\tan\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Calcoliamo la derivata

$$y^{'}=\frac{3\left(1+\tan^2 x\right)(1+\sin x)-3\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

calcolo la derivata nel punto di ascissa $x=\frac{\pi}{6}$

$$y^{'}=\frac{3\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}=2$$

La tangente avrà coefficiente angolare $m=2$ e passera per il punto $\left(\frac{\pi}{6};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; la sua equazione sarà

$$\begin{aligned} y-\frac{2\sqrt{3}}{3} &= 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \\ y &= 2x+\frac{\pi+2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

La retta interseca l'asse x nel punto

$$x=\frac{\pi+2\sqrt{3}}{6}$$

che rappresenta pure la distanza di T dall'origine.

Esercizio 45. Una pietra è lanciata verticalmente verso l'alto a partire da terra con una velocità iniziale $v_0=32\,\frac{m}{s}$ si muove secondo la legge oraria

$$s=s(t)=32t-5t^2$$

dove t è espresso in secondi ed s l'altezza via via raggiunta dalla pietra contata a partire da terra. Dopo quanto tempo la pietra si fermerà per poi ricadere? qual è l'altezza massima raggiunta?

Soluzione. La velocità istantanea in ogni momento di una particella può essere espressa, a partire dalla legge oraria, come

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0} v_{media}(t,\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Questa è naturalmente la derivata

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

della distanza in funzione del tempo. Nel caso in esame, calcolando la derivata di $s(t)$ rispetto a t troveremo la legge delle velocità, cioè come varia la velocità rispetto al tempo.

$$v(t)=32-10t$$

La pietra interrompe la salita e inizia la discesa quando la sua velocità passa da valori positivi a valori negativi. La sua velocità è quindi nulla. Quindi se poniamo $v=0$, avremo

$$32-10t=0 \qquad t=3,2\,s$$

Per trovare l'altezza massima, sostituiamo il valore del tempo trovato nella legge oraria

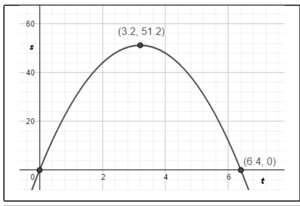
$$s(3,2)=32\times 3,2-5\times 3,2^2=51,2\,m$$

Qualora volessimo trovare l'accelerazione, ripeteremo quanto detto, questa volta definendo l'accelerazione istantanea come il limite della velocità media al tendere di Δt a zero. Per trovare come varia l'accelerazione in funzione del tempo, calcoleremo quindi la derivata della legge delle velocità

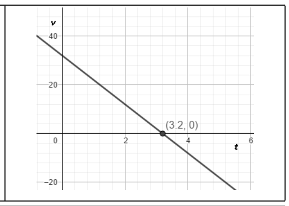
$$a(t)=-10\,\frac{m}{s^2}$$

cioè l'accelerazione è costante e quindi il moto è uniformemente accelerato.

Possiamo vedere anche graficamente queste leggi essendo delle funzioni matematiche in una variabile.



Legge oraria



Legge delle velocità

Questi grafici non descrivono però la traiettoria della pietra che è verticale.

Esercizio 46. Dato il moto rettilineo di equazione $s = 2t^5 - 160t^2 + t - 1$, trovare in quale istante l'accelerazione è nulla.

Soluzione. La legge oraria va considerata con le grandezze tempo e spostamento variabili con continuità, pertanto le definizioni di velocità e di accelerazione vanno riscritte mediante l'utilizzo del limite del loro rapporto incrementale, cioè mediante l'introduzione delle derivate. Pertanto

$$v = s' = \frac{ds}{dt} \qquad a = s" = \frac{d^2s}{dt}$$

Calcoliamo quindi la derivata seconda della legge oraria:

$$v = 10t^4 - 320t + 1 \qquad a = 40t^3 - 320$$

L'accelerazione a sarà $= 0$ quando

$$t^3 = 8 \qquad t = 3\,s$$

Esercizio 47. Una pietra viene lanciata nel vuoto verticalmente verso l'alto, a partire dal suolo, con una velocità iniziale di $147\,\frac{m}{s}$. Trovare la massima altezza raggiunta dalla pietra sapendo che la sua distanza s dal suolo dopo t secondi è $s = 147t - 4,9t^2$.

Soluzione. La velocità iniziale è $v_0 = 147\,\frac{m}{s}$. La massima altezza viene raggiunta dalla pietra quando la sua velocità si ridurrà a zero, dopo di che la pietra ridiscenderà. Calcoliamo quindi la velocità

$$\frac{ds}{dt} = v = 147 - 9,8t = 0$$

per cui

$$v = \frac{147}{9,8} = 15\,s$$

Per $t = 15\,s$, la distanza percorsa (massima altezza) sarà

$$s = 147 \times 15 - 4,9 \times 15^2 = 1102,5\,m$$

Esercizio 48. Un corpo viene lanciato nel vuoto verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale v_0. Sapendo che dopo $1\,s$ la sua velocità è tripla di quella che avrà dopo $5\,s$, trovare v_0.

Soluzione. La legge oraria di un tale moto decelerato per effetto della gravità che richiama verso il basso il corpo è, sapendo che l'accelerazione di gravità terrestre è pari a $9,8\,\frac{m}{s\grave{\imath}2}$

$$s = v_0 t - 4,9t^2$$

La legge delle velocità è espressa da $v = v_o - gt = v_0 - 9,8t$.

Dopo 1 s, la velocità sarà $v(1) = v_0 - 9,8$, mentre dopo 5 s, $v(5) = v_0 - 59$. Sappiamo che $v(1) = 3v(5)$, per cui

$$v_0 - 9,8 = 3(v_0 - 49) \quad 2v_0 = 137,2 \quad v_0 = 68,6\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 49. Un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto e lo spazio è legato al tempo dalla legge oraria $s = v_0 t - 4,9t^2$, ove v_0 indica la velocità all'istante $t = 0$. Quanto deve valere la velocità v_0 affinché il corpo raggiunga l'altezza di $20,4$ con una velocità di $0,4\,\frac{m}{s}$?

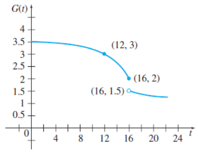
Soluzione. Le leggi del moto sono $s = v_0 t - 4,9t^2$ e $v = v_0 - 4,9t$. Sostituiamo i valori assegnati per la posizione e la velocità finale, scrivendo le equazioni sotto forma di sistema (due incognite)

$$\begin{cases} 20,4 = v_0 t - 4,9t^2 \\ 0,4 = v_0 - 9,8t \end{cases} \qquad \begin{cases} 20,4 = v_0 \cdot \frac{v_0 - 0,4}{9,8} - 4,9\left(\frac{v_0 - 0,4}{9,8}\right)^2 \\ t = \frac{v_0 - 0,4}{9,8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20,4 \cdot 9,8^2 = \left(v_0^2 - 0,4v_0\right) \cdot 9,8 - 4,9\left(v_0 - 0,4\right)^2 \\ t = \frac{v_0 - 0,4}{9,8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1959,216 = 4,9v_0^2 \\ t = \frac{v_0 - 0,4}{9,8} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 20 \\ t = 2 \end{cases}$$

Esercizio 50. Quando il prezzo di una materia prima essenziale (come la benzina) aumenta rapidamente, i consumi all'inizio calano lentamente. Se il prezzo continua a salire, tuttavia, si può avere un punto di "inversione", in cui il consumo ha un improvviso calo. Supponiamo che il grafico sotto mostri il consumo di benzina, $G(t)$, in milioni di galloni, in una certa area. Partiamo dal presupposto che il prezzo sta aumentando rapidamente. Qui t è il tempo in mesi dopo che il prezzo ha iniziato a salire. Utilizzare il grafico per rispondere ai quesiti: a) $\lim_{t \to 12} G(t)$; b) $\lim_{t \to 16^-} G(t)$; c) $G(16)$; d) punto di inversione.

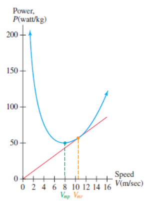


Soluzione. Osservando il grafico proposto possiamo ottenere

$$\lim_{t \to 12} G(t) = 3 \quad \lim_{t \to 16^-} G(t) = 2 \quad G(16) = 2$$

il punto di inversione della tendenza con un brusco calo si ha per $t = 16$. La funzione in questo punto ha un salto pari a $0,5$. In $t = 16$, la funzione non è continua.

Esercizio 51. Molti uccelli hanno muscoli di volo il cui dispendio di potenza varia con la velocità in un modo simile al grafico mostrato sotto. L'asse orizzontale del grafico mostra la velocità in metri al secondo e l'asse verticale la potenza in watt per chilogrammo.



a) La velocità v_{mp} minimizza i costi energetici per unità di tempo. Qual è la pendenza della linea tangente alla curva in corrispondenza di punto corrispondente a v_{mp}? Qual è il significato fisico della pendenza in quel punto?

b) La velocità v_{mr} minimizza i costi energetici per unità di distanza coperta. Stimare la pendenza della curva nel punto corrispondente a v_{mr}. Dai il significato della pendenza in quel punto.

c) Osservando la forma della curva, descrivi come varia la potenza al variare della velocità.

Soluzione. a) La tangente nel punto indicato è parallela all'asse x e quindi la sua pendenza è nulla. In questo caso avremo una condizione di minimo quando la potenza spesa assume il valore più basso. La pendenza ha come unità di misura $\frac{W}{kg} \cdot \frac{s}{m}$ ma essendo $W = kg\frac{m^2}{s^3}$, si ha $[m] = \frac{m^2}{s^3} \cdot \frac{s}{m} = \frac{m}{s^2}$ che è l'unità di misura di una accelerazione. Tale pendenza è il valore della derivata prima della funzione che descrive tale relazione per il valore della velocità v_{mp}.

b) In questo caso la tangente ha coefficiente angolare $m \simeq \frac{60}{10,5} = 5,7$; in corrispondenza di una $v = 10,5\,\frac{m}{s}$ la potenza necessaria è di circa $60\,\frac{W}{kg}$.

c) La potenza spesa diminuisce per velocità comprese tra $0 < v < v_{mp}$, mentre aumenta per velocità $v > v_{mp}$; la derivata prima sarà negativa nel primo intervallo, positiva nel secondo e nulla per $v = v_{mp}$

Esercizio 52. La scala Richter fornisce una misura della magnitudine di un terremoto. Infatti, il più grande valore di M mai registrato per un terremoto fu $8,9$ nel terremoto del 1933 in Giappone. La seguente formula mostra una relazione tra la quantità di energia rilasciata e il corrispettivo valore della scala Richter.

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{0,007}$$

dove E è misurata in kWh. a) Per il terremoto del 1933, quale valore di E dà un numero Richter $M = 8,9$? b) Trova il tasso di variazione del numero M di Richter in funzione dell'energia quando $E = 7,0 \cdot 10^5\,kWh$?

Soluzione. a) Se $M = 8,9$, l'equazione diviene

$$8,9 = \frac{2}{3} \log \frac{E}{0,007}$$

da cui

$$\log \frac{E}{0,007} = \frac{3}{2} \times 8,9 = 13,35$$

cioè, applicando la definizione di logaritmo (in base 10)

$$E = 0,007 \times 10^{13,35} \quad E = 1,57 \cdot 10^{11}\,kWh$$

b) il tasso di variazione in funzione di E si ottiene calcolando la derivata prima della funzione, dove $\log\frac{E}{0{,}007}=\log E-\log 0,007$

$$M'=\frac{2}{3}\frac{1}{\ln 10\cdot E}=\frac{2}{3}\frac{E}{\ln 10\times 0,07^2}=\frac{0,29}{E}$$

Se $E=7,0\cdot 10^5$, e

$$M'=\frac{0,29}{7,0\cdot 10^5}=4,1\cdot 10^{-7}$$

Esercizio 53. Il numero di persone $P(t)$ (in centinaia) infettate in t giorni dopo l'inizio di un'epidemia è approssimato dalla seguente relazione

$$P(t)=\frac{10\ln(0,19t+1)}{0,19t+1}$$

Quando il numero di persone infette inizierà a diminuire?

Soluzione. Si tratta di studiare quando la funzione data è crescente e decrescente e quali sono i punti stazionari. Calcoliamo quindi la sua derivata e studiamo quando si annulla.

$$P'(t)=\frac{\frac{1{,}9}{0{,}19t+1}(0,19t+1)-1,9\ln(0,19t+1)}{(0,19t+1)^2}=\frac{1,9-1,9\ln(0,19t+1)}{(0,19t+1)^2}=0$$

La derivata si annulla quando il numeratore si annulla

$$\ln(0,19t+1)=1$$

cioè

$$0,19t+1=e \qquad t=\tfrac{e-1}{0{,}19}=9,04$$

Esercizio 54. Un'auto rotola giù da una collina. La sua distanza (in metri) dal suo punto di partenza è data da $s(t)=1.5t^2+4t$, dove t è in secondi. (a) Fino a che distanza si sposterà l'auto dopo 10 secondi? (b) Qual è la velocità a 5 secondi? A 10 secondi? (c) Perché puoi dire dalla $v(t)$ che l'auto non si fermerà? (d) Qual è l'accelerazione a 5 secondi? A 10 secondi? (e) Cosa sta succedendo alla velocità e all'accelerazione quando t aumenta?

Soluzione. a) dopo $10\,s$ l'auto avrà percorso una distanza $s(10)=150+40=190\,m$; b) Calcoliamo la legge delle velocità tramite la derivata della legge oraria

$$v(t)=\frac{d(t)}{dt}=3.0t+4$$

per cui $v(5)=15+4=19\,\frac{m}{s}$; $v(10)=30+4=34\,\frac{m}{s}$. c) la velocità cresce linearmente con il tempo; l'accelerazione può essere ricavata dalla derivata della legge delle velocità

$$a=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2s(t)}{dt^2}=3.0$$

da cui si vede che l'accelerazione è costante e la legge oraria descrive un moto uniformemente accelerato.

Esercizio 55. La punta di una penna stilografica viene posta su un tampone di inchiostro, formando un cerchio la cui area aumenta alla velocità costante di 0,03 cm^2/s. Trova la velocità con cui il raggio del cerchio cambia quando il cerchio ha un raggio di $0,5\,cm$.

Soluzione. Introduciamo le quantità coinvolte: t :tempo, A: area, r: raggio del cerchio. A e r sono funzioni del tempo. Scriviamo le informazioni presenti nel testo in forma di equazioni

$$\tfrac{dA}{dt} = 0,03 \quad A = \pi r^2$$

Si tratta di trovare dr/dt quando $r = 0,5$. Deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione $A = \pi r^2$ e avremo

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

da cui

$$2\pi r \frac{dr}{dt} = 0.03$$

Poniamo ora $r = 0,5$ e risolviamo rispetto a dr/dt, avremo

$$2\pi \cdot \frac{1}{2}\frac{dr}{dt} = 0,03$$

da cui

$$\frac{dr}{dt} = \frac{0.03}{\pi}\,\frac{cm^2}{s}$$